$\boxed{12-1-2022}$

$\boxed{\text{Ορισμος}}$ Εστω L μια οικογενεια πραγματικων συναρτησεων : $X \to \mathbb{R}$ Λεμε οτι η L διαχωριζει τα σημεια του X, $\forall\, x,y \in X$, με $x \neq y$ $\exists\, f \in L$ τ.ω. $f(x) \neq f(y)$.

- $\mathbb{1} : X \to \mathbb{R}$, τ.ω. $\mathbb{1}(x) = 1$, $\forall x \in X$

- L χωρος συναρτησεων ή Lattice, αν $L \subseteq F(X)$ οπου $F(X) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$, L γραμμικος χωρος κ' 1) $|f| \in L$ και να ισχυουν.
$\Leftrightarrow$ 2) $(f_1, f_2 \in L \Rightarrow f_1 \vee f_2 \in L) \Leftrightarrow (f_1, f_2 \Rightarrow f_1 \wedge f_2 \in L)$
(Στην 2) αρκει να ισχυει το ενα απο τα δυο)

$\boxed{\text{Λημμα 1}}$ Εστω L γρ. υποχωρος του $F(X)$, που διαχωριζει τα σημεια του L κ' περιεχει την $\mathbb{1}$. Τοτε $\forall x,y \in X$, με $x \neq y$ κ' $\forall\, a, \beta \in \mathbb{R}$, $\exists\, f \in L$ τ.ω. $f(x) = a$ κ' $f(y) = \beta$

Αποδ/ $\exists\, g \in L$, τ.ω. $g(x) \neq g(y)$. Θετουμε

$$f = \frac{(a-\beta)\cdot g + (\beta g(x) - a g(y)) \cdot \mathbb{1}}{g(x) - g(y)} \in L$$

γραμμικός χώρος, άρα
1) $|f| \in L$
2) min, max $\in L$

Λήμμα 2 Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ. κ' $L \subseteq C(X)$ ένα lattice, που διαχωρίζει τα σημεία του X κ' $\mathbb{1} \in L$. Τότε $g \in C(X)$, $a \in X$, $\varepsilon > 0$, $\exists f \in L$, τ.ω. $f(a) = g(a)$ κ' $f > g - \varepsilon$

Αποδ/ Από Λήμμα 1, $\forall x \in X$, $\exists f_x \in L$, τ.ω.
(1) $f_x(a) = g(a)$, κ' $f_x(x) = g(x) \Rightarrow f_x(x) > g(x) - \varepsilon$ (2)

• Χρησιμοποιώ συμπάγεια, άρα φέρω ότι f_x, g συνεχής $\Rightarrow \exists V_x$ ανοιχτό στου X, όπου $x \in V_x$ τ.ω. $f_x(y) > g(y) - \varepsilon$, $\forall y \in V_x$

• $X = \bigcup_{x \in X} V_x \xrightarrow[\text{συμπαγής}]{X} \exists x_1, \dots, x_n \in X$, τ.ω $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$

• Θέτουμε $f = f_{x_1} \cup \dots \cup f_{x_n} \in L$ (από επαγωγή).

• $f(a) = \max\{f_{x_1}(a), \dots, f_{x_n}(a)\} = g(a)$ (1)

• Έστω $y \in X$. Τότε, $f(y) \geq f_{x_1}(y), \dots, f_{x_n}(y)$ (3)
$\exists i \in \{1, \dots, n\}$ τ.ω $y \in V_{x_i} \xrightarrow[(2)]{} f_{x_i}(y) > g(y) - \varepsilon$

$\xrightarrow{(3)} f(y) > g(y) - \varepsilon$.

1) Θεώρημα (Stone-Weierstrass για Lattices)
Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ κ' $L \subseteq C(X)$ ένα lattice που διαχωρίζει τα σημεία του X και περιέχει τη $\mathbb{1}$. Τότε $\overline{L} = C(X)$ (πυκνό στου $C(X)$)

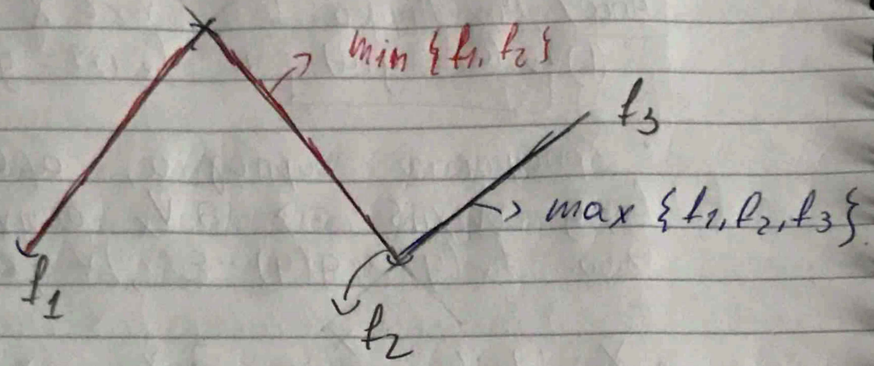
συνεχών συναρτήσεων

[Δηλ. $\forall \cancel{f}\ g \in C(X)$, $\exists \cancel{g}\ f \in L$, τ.ω. $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.]

Λογική

Εστω ότι είμαστε στην ευθεία και

$f(x) = ax + B$



$L = \{$ πολυγωνικές συναρτήσεις $: [a,B] \to \mathbb{R} \}$

$\downarrow$

Lattice

$\boxed{\Lambda 2}$ ή $\boxed{\text{Λήμμα 2:}}$ Για $g \in C(X)$, $a \in X$, $\varepsilon > 0$, $\exists f \in L$ τ.ω. $f(a) = g(a)$ κ' $f > g - \varepsilon$

Αποδ Θεωρήματος 1

Εστω $g \in C(X)$ κ' $\varepsilon > 0$. Αρκεί νδο $\exists f \in L$ τ.ω. $\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in X} \{|f(x) - g(x)|\} < \varepsilon$.

- Άρα, αρκεί νδο $\exists f \in L$, τ.ω. $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$
- Εστω $x \in X$. $\boxed{\Lambda 2} \Rightarrow \exists f_x \in L$, τ.ω. $f_x(x) = g(x)$ κ' $f_x > g - \varepsilon$.

Απο $f_x(x) = g(x) \Rightarrow \underbrace{f_x(x) < g(x) + \varepsilon}$ $\boxed{\text{I}}$

- Απο συνεχεια, αφου f_x, g συνεχεις $\Rightarrow$

περιοχη του X $\Rightarrow \exists V_x$ ανοιχτο που X, τ.ω. $f_x(y) < g(y) + \varepsilon$ $\forall y \in V_x$.

- $X = \bigcup_{x \in X} V_x \xRightarrow[\text{συμπαγης}]{X} \exists x_1, \ldots, x_n \in X$, τ.ω. $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$

- Θετουμε $f := f_{x_1} \wedge \ldots \wedge f_{x_n} \in L$ (από επαγωγη)

Για $y \in X$. Τοτε, $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$, τ.ω. $y \in V_i$

- $f(y) = \min\{f_{x_1}(y), \ldots, f_{x_n}(y)\} > g(y) - \varepsilon$

$f_{x_1}(y) > g(y) - \varepsilon, \ \ldots, \ f_{x_n}(y) > g(y) - \varepsilon$ $\quad$ ①

- $f(y) = \min\{f_{x_1}(y), \ldots, f_{x_n}(y)\} \leq f_{x_i}(y) \underset{y \in V_{x_i}}{<} g(y) + \varepsilon$

$\Rightarrow \exists f \in L$, τ.ω. $\forall y \in X$, $g(y) - \varepsilon < f(y) < g(y) + \varepsilon$ ☑

Ορισμος Εστω A γραμμικος υποχωρος του $F(x)$. Ο A θα λεγεται αλγεβρα συναρτησεων, αν $\forall f, g \in A$ ισχυει $f \cdot g \in A$

Παραδειγμα: Ο χωρος των πολυωνυμων κ' μεταβλητων με πραγματικα's συντελεστες.

Θεωρημα 2 (Stone-Weierstrass για αλγεβρες)

Εστω (X,d) συμπαγης μ.χ. κ' $A \subseteq C(X)$ μια αλγεβρα που διαχωριζει τα σημεια του X και περιεχει την μοναδα ($\boxed{\text{II}}$). Τοτε $\overline{A} = C(X)$ (A πυκνη, με την ομοιομορφη νορμα)

Το είπε προφορικα! $\{p_n\}$ -> ακολουθια πολυωνυμων.

Εστω A συμπαγες υποσυνολο του $\mathbb{R}^n$, ο χώρος όλων των πολυωνυμων απο $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, είναι μια άλγεβρα που διαχωρίζει τα σημεια του A και περιεχει την $\mathbb{1}$, αρα ο χωρος αυτος είναι πυκνος στον $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, δηλ καθε συνεχης $f: A \to \mathbb{R}$, μπορουμε να την προσεγγίζουμε ομοιομορφα, από μια $\{p_n\}$ n μεταβλητων

Πορισμα Εστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A συμπαγές κ' $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τοτε, $\exists$ ακολουθια $\{p_n\}$ n μεταβλητων τ.ω $p_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$

Λημμα 3 Υπαρχει ακολουθια $\{p_n\}$ μιας μεταβλητης, τ.ω $p_n \xrightarrow{\text{ομ.}} \sqrt{x}$, στο $[0,1]$

Αποδ Θεωρηματος 2/ Θδο $\bar{A}$ lattice κ' ότι $\bar{A} \subseteq C(X)$ (τοτε $\bar{A} \ni \mathbb{1}$, $\bar{A}$ διαχωρίζει τα σημεια του X) και

$$\left[\ \bar{A} \subseteq C(X) \overset{(\Theta 1)}{\Longrightarrow} (\bar{\bar{A}}) = C(X) \Rightarrow \bar{A} = C(X)\ \right]$$

- Θδο $\bar{A} \subseteq C(X)$. Εστω $f \in \bar{A} \Rightarrow \exists \{f_n\} \subseteq A \subseteq C(X)$ τ.ω. $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \underset{\text{συνεχεις}}{\overset{f_n}{\Longrightarrow}} f$ συνεχής

- Εστω $f, g \in \bar{A}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Θδο $\lambda f + \mu g \in \bar{A}$. $\exists \{f_n\}, \{g_n\} \subseteq A$, τ.ω. $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$, $g_n \xrightarrow{\text{ομ}} g \Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda f_n + \mu g_n \xrightarrow{\text{ομ}} \lambda f + \mu g \Rightarrow \lambda f + \mu g \in \bar{A} \Rightarrow$ $\bar{A}$ γραμμ. υποχωρος του $F(X)$.

$(*)$ Διαιρω με την νορμα για να είμαι στην περιοχη $[0,1]$ του 13

$\bar{A}$ κλειστό

• Θδο $\bar{A}$ είναι αλγεβρα

Εστω $f,g \in \bar{A}$. Αρκει νδο $f \cdot g \in \bar{A}$

Εστω $\{f_n\}, \{g_n\} \subseteq A$, ζω $f_n \xrightarrow{ομ} f$, $g_n \xrightarrow{ομ} g$

• $\|f_n\|_\infty \leq \| f_n - f\| + \|f\|_\infty < +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \{f_n\}$ ομ. φραγμενη κ' η $\{g_n\}$ το ιδιο.

$\xrightarrow[Αλλ.]{Ασκ} f_n \cdot g_n \xrightarrow{ομ} f \cdot g \in \bar{A}$

• Δειξαμε οτι $\bar{A}$ είναι αλγεβρα, τωρα πρεπει νδο $\bar{A}$ lattice, για να το κανουμε αυτο πρεπει νδο $|f| \in \bar{A}$

Εστω $f \in \bar{A}$, $f \neq 0 \Rightarrow f \cdot f \in \bar{A} \Rightarrow f^2 \in \bar{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^2/\|f\|_\infty^2 \in \bar{A}$

$$\xrightarrow{\boxed{13}} P_n \circ \left(f^2/\|f\|_\infty^2 \right)^{(*)} \xrightarrow{ομ} \sqrt{f^2/\|f\|_\infty^2}$$

$\boxed{Αλλ}$ $\boxed{Ασκ}$ Αν $g_n \xrightarrow{ομ} g$ κ' $g_n \circ f$ οριζεται $\Rightarrow g_n \circ f \xrightarrow{ομ} g \circ f$.

$$\sqrt{f^2/\|f\|_\infty^2} = \frac{|f|}{\|f\|_\infty}$$

• Εστω P πολυωνυμο μίας μεταβλητης κ' $f \in \bar{A}$. Τότε $p(f) = P \circ f \in \bar{A}$

$\boxed{Αποδ}$ $f^2 = f \cdot f \in \bar{A}$, $f^3 = f^2 \cdot f \in \bar{A}$, ..., $f^n \in \bar{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Αν $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \Rightarrow P(f) = a_0 + a_1 f + \dots + a_n f^n \in \bar{A}$

Επιστροφή στο Θ2

Άρα $P_n \circ (f^2/\|f\|_\infty) \in \bar{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{|f|}{\|f\|_\infty} \Rightarrow \frac{|f|}{\|f\|_\infty} \in \bar{A} \Rightarrow |f| \in \bar{A}$.

Άρα $\bar{A}$ lattice. ∎

Απόδ. 13) $P_n \xrightarrow{\text{ομ}} \sqrt{x}$

- Έστω $P_1 \equiv 0$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x)^2)$

- $\{P_n\}$ ακολουθία. κ' $0 \le P_n(x) \le \sqrt{x}$, $\forall x \in [0,1]$
Με επαγωγή πάνω στο n. Για $n=1$ ισχύει
Έστω ότι ισχύει για $n=k$. Θδο ισχύει $n=k+1$
Προφανώς P_{k+1} πολυώνυμο. Επαγωγική υπόθεση
(1) $0 \le P_k(x) \le \sqrt{x}$, $\forall x \in [0,1]$

$P_{k+1}(x) = \underbrace{P_k(x)}_{\ge 0} + \frac{1}{2}(x - \underbrace{P_k^2(x)}_{\ge 0}) \Rightarrow$

$\Rightarrow P_{k+1}(x) \ge 0$, $\forall x \in [0,1]$.

- Αρκεί νδο $P_k(x) - \sqrt{x} \le 0$ (1)

Άρα $\sqrt{x} - P_{k+1}(x) = \sqrt{x} - P_k(x) - \frac{1}{2}(x - P_k^2(x))$

$= \sqrt{x} - P_k(x) - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_k(x))(\sqrt{x} - P_k(x))$

$= \underbrace{[\sqrt{x} - P_k(x)]}_{\ge 0} \underbrace{[1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_k(x))]}_{\ge 0}$

Από επαγωγική υπόθεση

Τωρα για $\left[\left(1-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+P_k(x)\right)\right)\right]$

$P_k(x) \leq \sqrt{x} \leq 1, \forall x \in [0,1] \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1, \forall x \in [0,1].$

Αρα $\left(1-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+P_k(x)\right)\right] \geq 0 \Rightarrow \boxed{P_k(x) \leq \sqrt{x}}$

- Τωρα θδο $\{P_n\}$ ~~[illegible]~~ μονοτουη
- $\{P_n\}$ αυξουσα : $P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right) \geq 0$

Αρα $\forall x \in [0,1]$, $\{P_n(x)\}$ αυξουσα κ' φραγμενη αρα συγκλίνει. Θετουμε $f(x) = \lim_n P_n(x) \geq 0$.

$\Rightarrow f(x) = f(x) + \frac{1}{2}\left(x - f^2(x)\right) \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}, \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow P_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{Dini} P_n \xrightarrow{o\mu} f.$ ◻